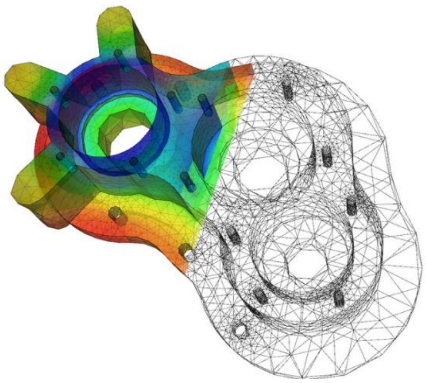
RESISTANCE DES MATERIAUX

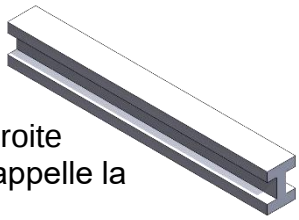
Partie n°1 : Le vocabulaire en RdM
Partie n°2 : Les hypothèses en RdM
Partie n°3 : Les sollicitations simples
Partie n°4 : La notion de contrainte
Partie n°5 : Détermination et répartition des contraintes en fonction des sollicitations
Partie n°6 : L'essai de traction et la loi de Hooke
Partie n°7 : Conditions de résistance



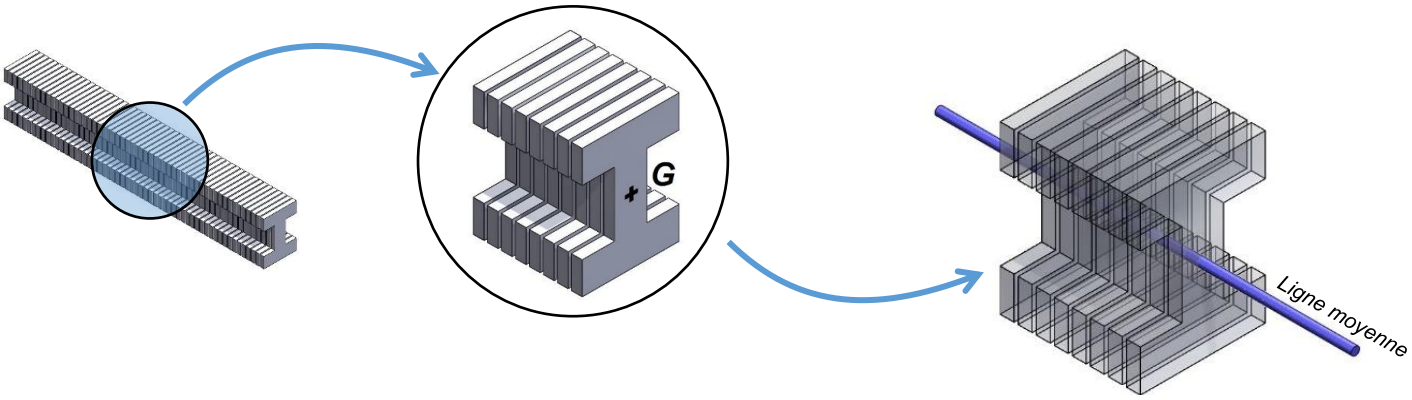
La Résistance des Matériaux (RdM) permet de fiabiliser la conception d'objets techniques en utilisant des modèles de comportements simplifiés. L'ensemble des techniques met en évidence les contraintes au sein des objets et les déformations subies afin d'optimiser formes et dimensions. Dans ce cours, nous nous limiterons aux notions de base qui doivent permettre de comprendre et d'anticiper le comportement des matériaux soumis à des sollicitations mécaniques simples.

Le vocabulaire en RdM

1.1 La notion de poutre

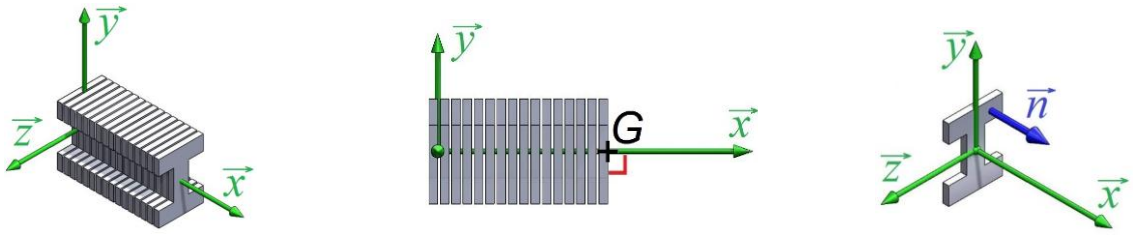


Le solide sollicité, et étudié en RdM, sera modélisé par une poutre. Cette poutre est décomposée en une succession de section droite. Chaque section droite possède un barycentre G. L'ensemble des barycentres forme une droite que l'on appelle la ligne moyenne. Les sections droites sont perpendiculaires à la ligne moyenne.



Deux des dimensions de la poutre sont petites par rapport à la troisième. En d'autres termes les dimensions de la section droite sont petites par rapport à la longueur de la poutre. Ce principe permet d'approximer la poutre par une ligne (droite ou courbe, avec un fort rayon de courbure) et des sections droites. En général, une longueur de l'ordre de deux à trois fois la plus grande dimension de la section droite est considérée suffisante pour appliquer cette modélisation.

Lors d'une étude en RdM et afin de caractériser les différents paramètres de cette dernière, nous utiliserons toujours le même repère : L'origine est à gauche de la poutre, au début de celle-ci. L'axe des abscisses $\vec{x}$ est la ligne moyenne. L'axe des ordonnées $\vec{y}$ est vertical. Le repère est orthonormé direct. Ainsi la position d'une section droite est repérée par son abscisse x , cette section droite est dans le plan $(G;\vec{y};\vec{z})$ et la normale $\vec{n}$ à la section droite est suivant l'axe $(G;\vec{x})$.



1.2 Sollicitation et torseur de cohésion

Lorsqu'une poutre subit des actions mécaniques extérieures, elle est sollicitée. Cette sollicitation est caractérisée par un torseur de cohésion (torseur d'inter-effort entre deux sections droites successives exprimé au point G, barycentre de la section droite). Ce torseur de cohésion peut varier le long de la poutre en fonction de l'abscisse de la section droite.

$$\{\tau_{II/I}\}_G = \left\{\begin{array}{c|c} N & M_t \\ T_y & M_{f(G,\vec{y})} \\ T_z & M_{f(G,\vec{z})} \end{array}\right\}_{(G;R)}$$

N *effort normal*
T_y *et* T_z *effort tranchant*
M_t *moment de torsion*
$M_{f(G,\vec{y})}$ *et* $M_{f(G,\vec{z})}$ *moment de flexion*

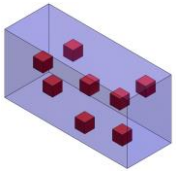
On appelle sollicitation simple, une sollicitation caractérisée par un torseur de cohésion ayant une composante non nulle, exception faite de la flexion simple qui est caractérisée de deux composantes non nulles et de la flexion pure qui n'est caractérisée que par une seule. Ces sollicitations « élémentaires » sont : la traction, la compression, le cisaillement, la torsion, la flexion (simple et pure).

Le torseur de cohésion est obtenu par l'étude de l'équilibre statique d'une portion de la poutre sollicitée, limitée par la section extrême de gauche ($x = 0$) et par la section droite d'abscisse x où l'on souhaite déterminer ce torseur. En effet, cette portion de poutre subit un certain nombre d'actions mécaniques extérieures connues ainsi que les actions mécaniques modélisées par le torseur de cohésion, ce qui permet de déterminer ce dernier.

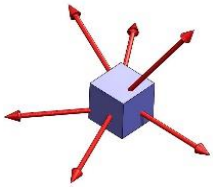
Les hypothèses en RdM

2.1 Hypothèses sur le matériau

Le matériau du modèle étudié en RdM doit avoir les caractéristiques suivantes :

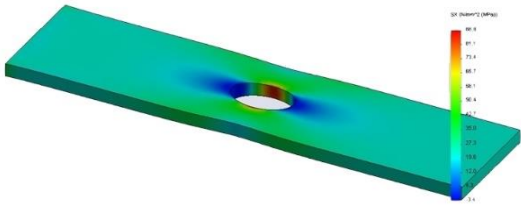


- Homogène : Le matériau composant l'objet sollicité a des propriétés mécaniques identiques en tout point du volume de l'objet.
- Isotrope : En un point donné, les propriétés mécaniques sont identiques dans toutes les directions et dans tous les sens.



- Continu : Le volume de l'objet ne présente pas de défaut macroscopique (fissure, crique…).
- Elastique : le matériau se déforme proportionnellement à l'effort appliqué et reprend sa forme initiale lorsque la sollicitation disparaît.

2.2 Hypothèses sur la géométrie de la poutre



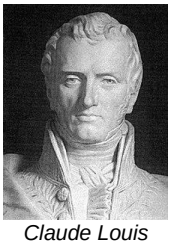
Phénomène de concentration de contraintes

Les sections droites successives peuvent varier en dimension, mais cette variation doit être « lente » le long de la ligne moyenne. En cas de variation brusque des dimensions, des phénomènes de concentration de contraintes apparaitront et seront pris en compte par la détermination de coefficient de concentration de contraintes, dépendant de la nature de la variation en forme et en importance. Ces coefficients permettront de calculer les contraintes en ces points précis.

La ligne moyenne est généralement droite, mais elle peut éventuellement être courbe pour peu que le rayon de courbure de cette dernière soit important.

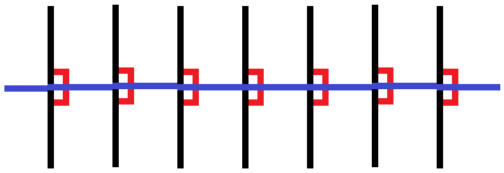
2.3 Hypothèse de Navier Bernoulli

Daniel BERNOULLI 1700-1782

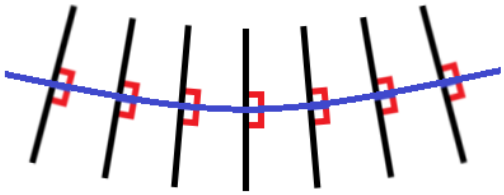


Claude Louis NAVIER 1785-1836

Les sections droites d'une poutre sont perpendiculaires à la ligne moyenne avant déformation. Après déformation, les sections droites restent perpendiculaires à la ligne moyenne déformée.

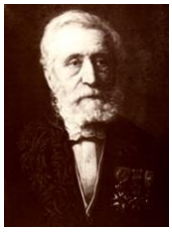


Avant déformation



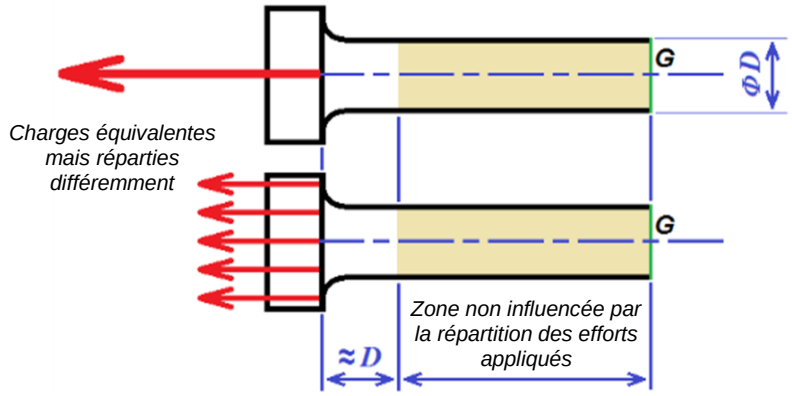
Après déformation

2.4 Hypothèse de Barré de Saint-Venant



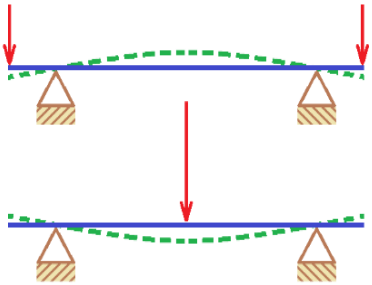
Adhémar BARRE DE SAINT VENANT 1797-1886

Le principe de Saint-Venant précise que le comportement en un point quelconque de la poutre, pourvu que ce point soit suffisamment éloigné des zones d'applications des forces et des liaisons, est indépendant de la façon dont sont appliquées les forces et de la façon dont sont physiquement réalisées les liaisons ; le comportement dépend alors uniquement du torseur des forces internes en ce point.

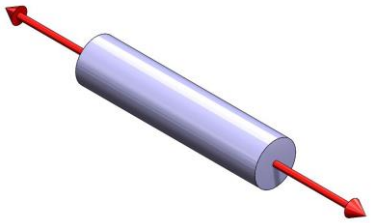


2.5 Remarque complémentaire

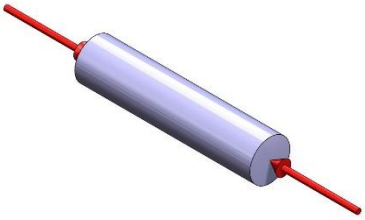
En Résistance des Matériaux on ne doit pas remplacer un système d'actions mécaniques par un système d'actions mécaniques vectoriellement équivalent, du simple fait que ces derniers ne créeront pas les mêmes déformations.



3.1 La traction



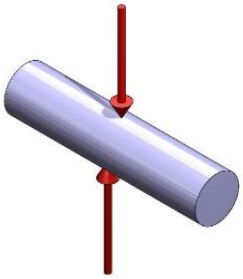
Lorsque la poutre est soumise à l'action de deux forces dirigées suivant son axe et de sens vers l'extérieur de la matière, la poutre est sollicitée à la traction simple. Les sections droites s'éloignent les unes des autres suivant la ligne moyenne : la poutre s'allonge.



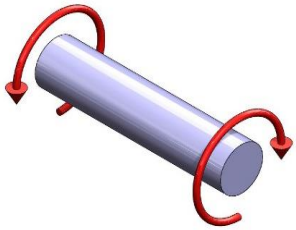
3.2 La compression

Lorsque la poutre est soumise à l'action de deux forces dirigées suivant son axe et de sens vers l'intérieur de la matière, la poutre est sollicitée à la compression simple. Les sections droites se rapprochent les unes des autres suivant la ligne moyenne : la poutre se comprime.

3.3 Le cisaillement



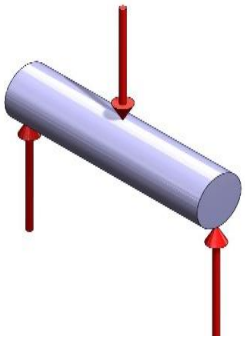
Lorsque la poutre est soumise à l'action de deux forces placées dans deux plans transversaux très proches, la poutre est sollicitée au cisaillement simple. Les deux sections droites situées dans les deux plans transversaux glissent l'une par rapport à l'autre : la poutre est cisaillée.



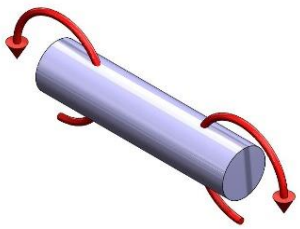
3.4 La torsion

Lorsque la poutre est soumise à l'action de deux moments exercés dans les sections extrêmes de la poutre et autour de l'axe de cette dernière, la poutre est sollicitée à la torsion simple. Les sections droites tournent les unes par rapport aux autres autour de la ligne moyenne : la poutre se tord.

3.5 La flexion simple



Lorsque la poutre est soumise à l'action de forces verticales situées dans le plan $(O;\vec{x};\vec{y})$, la poutre est sollicitée à la flexion simple. Les sections droites tournent autour des axes $(G;\vec{z})$: la poutre fléchit.



3.6 La flexion pure

Lorsque la poutre est soumise à l'action de deux moments exercés dans les sections extrêmes de la poutre et autour de l'axe des $\vec{z}$, la poutre est sollicitée à la flexion pure. Les sections droites tournent autour des axes $(G;\vec{z})$: la poutre fléchit.

3.7 Sollicitation composée

Une sollicitation composée est le cumul de plusieurs sollicitations simples ou pures. Les effets d'une sollicitation composée est la somme des effets des sollicitations simples, ou pures, la composant.

La notion de contrainte

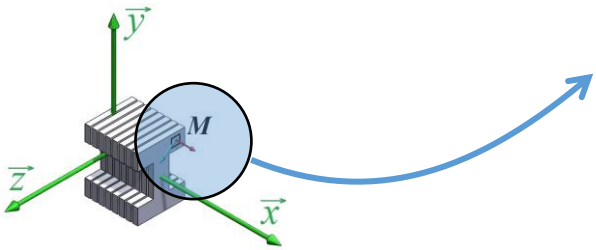
4.1 Les contraintes

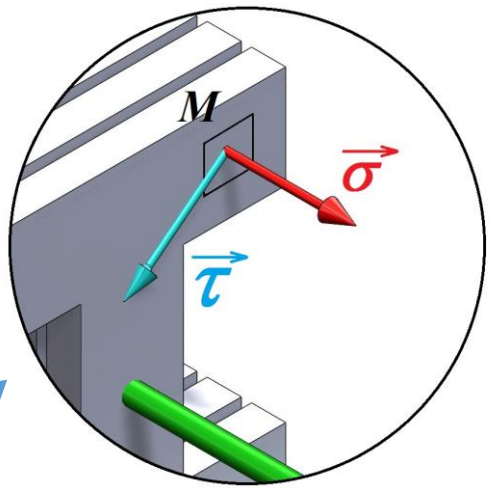
Le torseur de cohésion (voir 1.2) est l'expression des actions mécaniques exercées sur la section droite et exprimées au barycentre G de cette dernière. Dans les faits, ces actions mécaniques sont réparties dans la section droite et sont modélisées par des vecteurs que l'on nomme contraintes. La répartition des contraintes dépendra de la nature de la sollicitation et de la géométrie de la poutre (voir Partie n°5).

Une contrainte est, comme une force, caractérisée par sa direction et son sens… On parle de vecteur contrainte. Une contrainte est homogène à une pression et sera généralement exprimée en MPa (1 MPa = 1 N/mm^2).

4.2 Contraintes normales et contraintes tangentielles

En un point M d'une section droite, on distinguera les contraintes normales, dirigées suivant l'axe $(M;\vec{x})$, et les contraintes tangentielles, contenues dans le plan $(M;\vec{y};\vec{z})$. Le vecteur contrainte normale sera écrit $\vec{\sigma}$ (lire sigma) et le vecteur contrainte tangentielle sera écrit $\vec{\tau}$ (lire tau).





Détermination et répartition des contraintes en fonction des sollicitations

Dans cette partie nous nous limiterons à définir la répartition des contraintes dans une section droite de la poutre sollicitée et à exprimer la valeur de cette contrainte en fonction des efforts qui sollicitent cette dernière.

5.1 Traction

La poutre est soumise à un effort de traction *N*.

Les sections droites s'éloignent les unes des autres suivant la ligne moyenne.

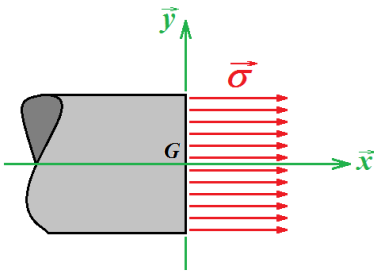
Les contraintes sont normales et réparties uniformément au sein de la section droite.

$$\{\tau_{II/I}\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(G;R)} \quad avec\ N > 0$$

Torseur de cohésion

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

σ contrainte exprimée en MPa
N effort de traction exprimé en N
S aire de la section droite exprimée en mm^2



5.2 Compression

La poutre est soumise à un effort de compression *N*.

Les sections droites se rapprochent les unes des autres suivant la ligne moyenne.

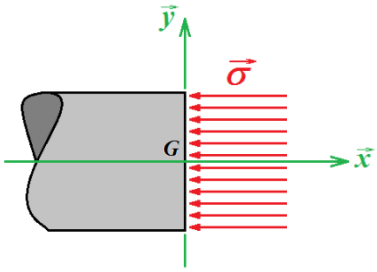
Les contraintes sont normales et réparties uniformément au sein de la section droite.

$$\{\tau_{II/I}\}_G = \left\{\begin{matrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{(G;R)} \quad avec\ N < 0$$

Torseur de cohésion

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

σ contrainte exprimée en MPa
N effort de traction exprimé en N
S aire de la section droite exprimée en mm^2



5.3 Cisaillement

La poutre est soumise à un effort tranchant *T*.

Les deux sections droites glissent transversalement l'une par rapport à l'autre suivant l'axe $(G;\vec{y})$.

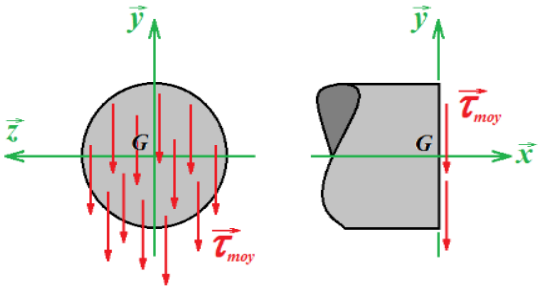
Les contraintes sont tangentielles et on considérera qu'elles sont réparties uniformément au sein de la section droite.

$$\{\tau_{II/I}\}_G = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{(G;R)}$$

Torseur de cohésion

$$\tau_{moy} = \frac{T}{S}$$

τ_{moy} contrainte exprimée en MPa
T effort tranchant exprimé en N
S aire de la section droite exprimée en mm^2



5.4 Torsion

La poutre est soumise à un moment de torsion M_t.

Les sections droites glissent les unes par rapport aux autres en tournant autour de la ligne moyenne.

Les contraintes sont tangentielles et proportionnelles à la distance qui les sépare du barycentre G de la section droite.

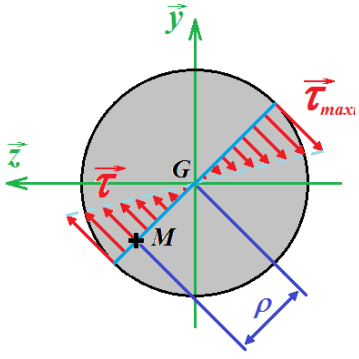
$$\{\tau_{II/I}\}_G = \left\{\begin{matrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{(G;R)}$$

Torseur de cohésion

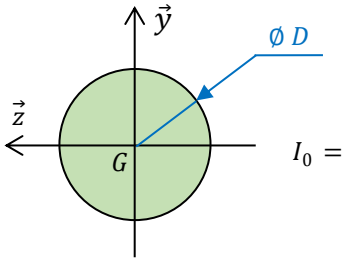
$$\tau = \frac{\rho\ .\ M_t}{I_0}$$

τ contrainte exprimée en MPa
M_t moment de torsion exprimé en N.mm
I_0 moment quadratique polaire de la section droite exprimée en mm^4

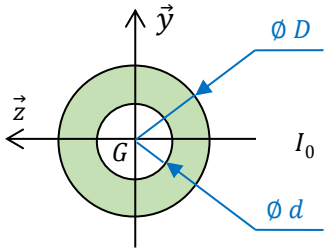
ρ distance séparant le point où l'on calcule la contrainte du barycentre G exprimée en mm



Moment quadratique polaire de la section droite



$$I_0 = \frac{\pi \,.\, D^4}{32}$$



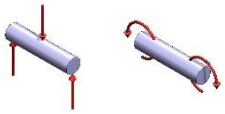
$$I_0 = \frac{\pi \,.\, (D^4 - d^4)}{32}$$

$$\tau_{maxi} = \frac{R \,.\, M_t}{I_0}$$

Les contraintes tangentielles sont maximum à la périphérie de la section droite, soit pour ρ = R = D/2

Pour une poutre cylindrique pleine de diamètre D, cela donne : $\tau_{maxi} = \frac{R \,.\, M_t}{I_0} = \frac{\frac{D}{2} \,.\, M_t}{\frac{\pi \,.\, D^4}{32}} = \frac{16 \,.\, M_t}{\pi \,.\, D^3}$

5.5 Flexion simple et pure



La poutre est soumise à l'action de forces verticales situées dans le plan $(O;\vec{x};\vec{y})$
et / ou
La poutre est soumise à l'action de deux moments exercés dans les sections extrêmes de la poutre et autour de l'axe des $\vec{z}$

Les sections droites tournent autour des axes $(G;\vec{z})$.

Les contraintes sont normales et proportionnelles à la distance qui les sépare du plan $(G;\vec{x};\vec{z})$.

$$\{\tau_{II/I}\}_G = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{f(G;\vec{z})} \end{matrix}\right\}_{(G;R)}$$

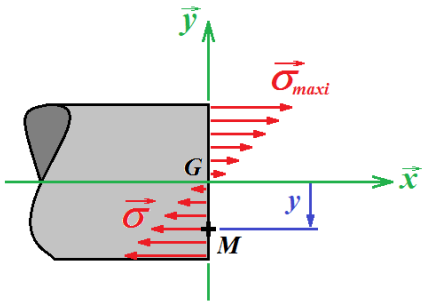
Flexion simple
Torseur de cohésion

$$\{\tau_{II/I}\}_G = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{f(G;\vec{z})} \end{matrix}\right\}_{(G;R)}$$

Flexion pure
Torseur de cohésion

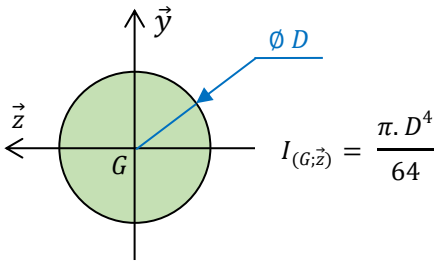
$$\sigma = -\frac{y \,.\, M_f}{I_{(G;\vec{z})}}$$

σ contrainte exprimée en MPa
M_f moment de flexion exprimé en N.mm
$I_{(G;\vec{z})}$ moment quadratique par rapport à l'axe $(G;\vec{z})$ de la section droite exprimée en mm⁴
y ordonnée du point où l'on calcule la contrainte exprimée en mm

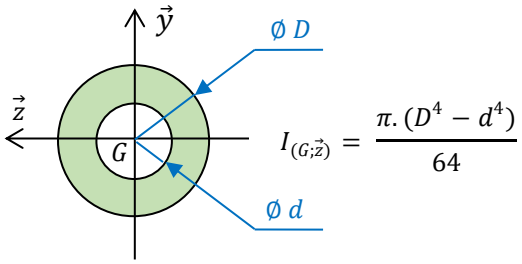


Dans la figure ci-dessus, Mf est négatif

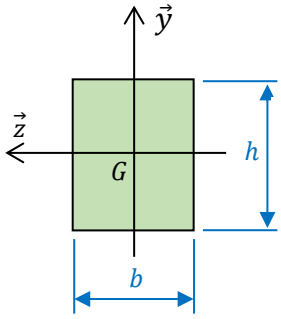
Moment quadratique par rapport à l'axe $(G;\vec{z})$ de la section droite



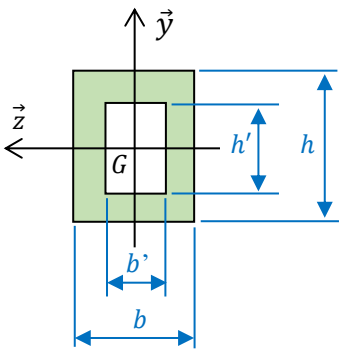
$$I_{(G;\vec{z})} = \frac{\pi . D^4}{64}$$



$$I_{(G;\vec{z})} = \frac{\pi . (D^4 - d^4)}{64}$$



$$I_{(G;\vec{z})} = \frac{b . h^3}{12}$$



$$I_{(G;\vec{z})} = \frac{b . h^3 - b' . h'^3}{12}$$

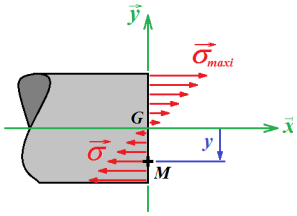
$$\sigma_{maxi} = -\frac{y_{maxi} \cdot M_f}{I_{(G;\vec{z})}}$$

Dans une section droite donnée

Dans une section droite donnée, la contrainte normale est maximum pour les points les plus éloignés du plan $(G;\vec{x};\vec{z})$, soit pour l'ordonnée maximum y_{maxi}.

Les contraintes normales sont nulles dans le plan $(G;\vec{x};\vec{z})$, soit pour $y = 0$: Ce plan est appelé « plan des fibres neutres ».

Dans le cas de répartition des contraintes décrit ci-contre, les fibres des plans au-dessus du plan des fibres neutres ($y > 0$) sont soumises à de la traction et les fibres des plans en-dessous du plan des fibres neutres ($y < 0$) sont soumises à de la compression.



Ici, Mf est négatif !

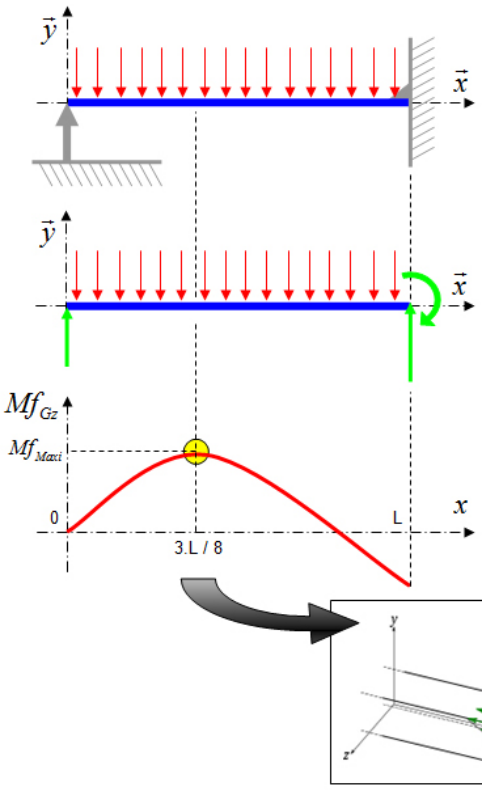
Le long de la poutre, l'effort tranchant et le moment de flexion varient, ils sont fonctions de l'abscisse x définissant la position de la section droite. Ces variations sont représentées par deux diagrammes : le diagramme de l'effort tranchant et le diagramme du moment fléchissant.

Il y a donc une section droite plus sollicitée que les autres : celle où le moment de flexion est maximum : $M_{f\,maxi}$. La contrainte normale est donc maximum pour les points les plus éloignés du plan $(G;\vec{x};\vec{z})$ dans la section droite la plus sollicitée.

$$\sigma_{maxi} = -\frac{y_{maxi} \cdot M_{f\,maxi}}{I_{(G;\vec{z})}}$$

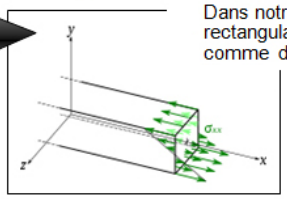
Pour l'ensemble de la poutre sollicitée

Démarche de détermination de la contrainte maximum dans le cas d'une poutre soumise à de la flexion simple



1. Modéliser le système étudié (ici une poutre de longueur L posée sur un appui et encastrée à l'autre extrémité)
2. Modéliser les charges appliquées sur le système (ici une charge répartie uniformément le long de la poutre).
3. Déterminer toutes les actions mécaniques agissant sur la poutre étudiée.
4. Déterminer l'évolution du moment de flexion Mf_{Gz} en fonction de l'abscisse x et créer le diagramme du moment fléchissant.
5. Repérer sur le diagramme du moment fléchissant le moment de flexion maximum Mf_{Maxi}.
6. Repérer la section droite de la poutre dans laquelle le moment de flexion est maximum (ici, pour ce cas particulier, en x = 3.L / 8).
7. Dans cette section droite, calculer la valeur de la contrainte maximum (cette valeur dépendra de la géométrie de la dite section et de Mf_{Maxi}).

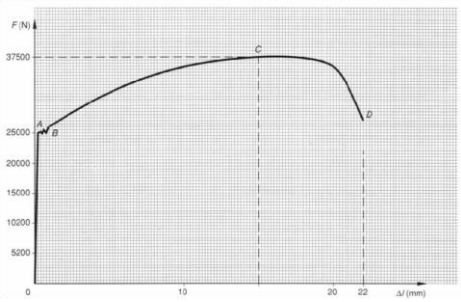
   Dans notre cas, supposons que la section soit rectangulaire, la répartition des contraintes est comme décrite dans l'encadré ci-dessous.



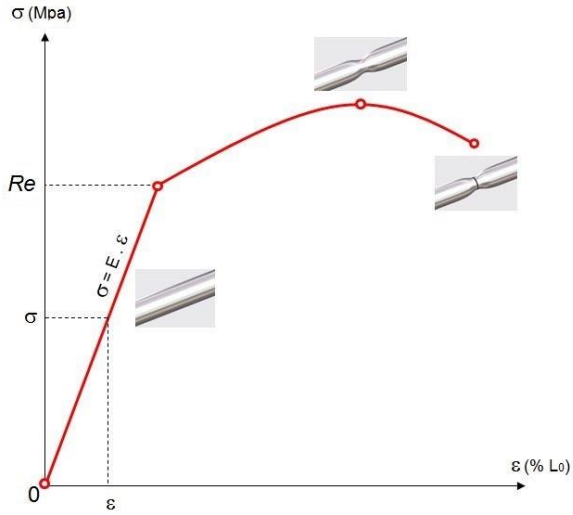
Ici, Mf est positif !

6.1 L'essai de traction

Principe de l'essai : On soumet une éprouvette à un effort de traction en augmentant son intensité lentement et sans à-coup. On relève l'allongement de l'éprouvette en fonction de l'effort de traction exercé. Pour obtenir les caractéristiques du matériau de l'éprouvette testée, il est nécessaire de prendre en compte la longueur de cette dernière ainsi que l'aire de sa section droite. La courbe de l'essai de traction exprimera donc la contrainte normale en fonction de l'allongement relatif : $\sigma = f(\varepsilon_x)$



Effort de traction en fonction de l'allongement

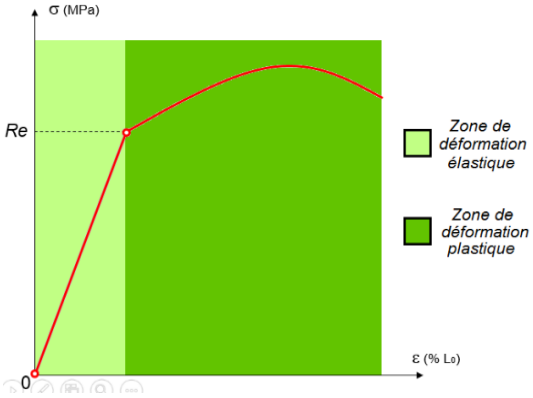


$\sigma = f(\varepsilon_x)$

$\sigma = f(\varepsilon_x)$ *avec* $\sigma = \frac{N}{S}$ *et* $\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l_0}$

σ est la contrainte (MPa)
ε_x est l'allongement relatif (sans unité ou en %)
N est l'effort de traction (N)
S est l'aire de la section droite (mm^2)
Δl est l'allongement (mm)
l_0 est la longueur initiale (mm)

6.2 Caractéristiques de la courbe d'essai de traction



La courbe de traction permet de définir deux zones : La zone de déformation élastique et la zone de déformation plastique.

Dans la zone de déformation **élastique** :

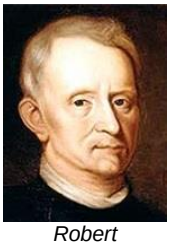
- Si l'on n'exerce plus d'effort de traction, l'éprouvette reprend sa longueur initiale. Il n'y a pas de déformation permanente.
- La contrainte n'a pas atteint la valeur *Re* qui est la résistance élastique du matériau sollicité exprimée en MPa.
- La contrainte est proportionnelle à l'allongement relatif. Cette proportionnalité est caractérisée par un segment de droite sur la courbe de l'essai.

Dans la zone de déformation **plastique** :

- Si l'on n'exerce plus d'effort de traction, l'éprouvette ne reprend pas sa longueur initiale. Il y a une déformation permanente.
- La contrainte a dépassé la valeur *Re* qui est la résistance élastique du matériau sollicité exprimée en MPa.
- La contrainte n'est plus proportionnelle à l'allongement relatif.
- Un phénomène de striction (affaissement latérale de certaines sections droites) peut apparaître avant la rupture de l'éprouvette.

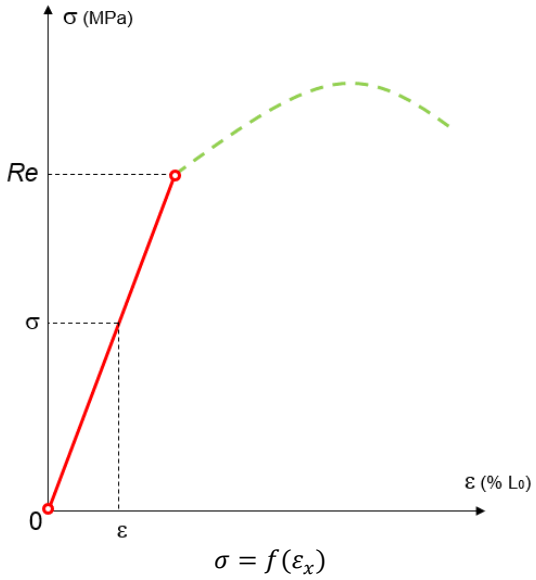
Striction

6.3 Loi de Hooke



Robert HOOKE 1635-1703

Cette loi de comportement a été énoncée en 1678 par Robert Hooke, par la phrase en latin : « ut tensio sic vis » … Ce qui signifie « telle extension, telle force », ou bien en termes modernes : « l'allongement est proportionnel à la force ».



$\sigma = f(\varepsilon_x)$

Cette proportionnalité est visible dans la zone de déformation élastique du matériau puisque la courbe de l'essai est une droite dans cette zone.

L'allongement relatif est l'abscisse. La contrainte est l'ordonnée. Si nous appelons *E* le coefficient directeur (la pente) de la droite, comme celle-ci passe par l'origine, alors l'équation de cette droite est :

$$\sigma = E \,.\, \varepsilon_x$$

… C'est la loi de Hooke !

E est une caractéristique du matériau de l'éprouvette sollicitée. E est le module de Young, encore appelé module d'élasticité longitudinale. Ce module est exprimé en MPa.

Valeurs approximatives de E pour quelques matériaux :

Fonte : 60 000 à 160 000 MPa
Acier : 200 000 MPa
Cuivre : 120 000 MPa
Aluminium : 70 000 MPa
Tungstène : 400 000 MPa

6.4 Mise en application de la loi de Hooke

La loi de Hooke permet, entre autre, de calculer l'allongement d'une poutre soumise à de la traction (ou à un raccourcissement dû à de la compression), à condition bien sur que la contrainte soit inférieure à la résistance élastique *Re* …Il faut rester dans la zone de déformation élastique !

Supposons que nous connaissions la résistance élastique *Re* et le module de Young *E* du matériau composant une poutre soumise à de la traction. Nous connaissons également les caractéristiques dimensionnelles de la poutre (longueur initiale *L* et aire de la section droite *S*), ainsi que l'effort de traction *N* auquel elle est soumise.

Avant d'utiliser la loi de Hooke, il faut vérifier que nous sommes bien dans la zone de déformation élastique. Calculons la contrainte, vérifions qu'elle est inférieure à la résistance élastique *Re* et si tel est le cas calculons l'allongement ΔL de la poutre grâce à la loi de Hooke :

$$\sigma = \frac{N}{S} \text{ … si } \sigma < Re \text{ alors } \sigma = E \,.\, \varepsilon_x \text{ donc } \frac{N}{S} = E \,.\, \frac{\Delta L}{L} \text{ soit } \Delta L = \frac{N \,.\, L}{S \,.E}$$

7.1 Condition de résistance

Afin de valider ou d'invalider les capacités de résistance d'une pièce mécanique, il suffit de comparer la contrainte réelle supportée par la pièce aux contraintes limites du matériau qui la constitue.

Si la contrainte réelle dans la pièce est σ et que la résistance élastique du matériau est *Re*, alors si l'on souhaite rester dans le domaine de déformation élastique il faut respecter la condition suivante :

$$\sigma < Re$$

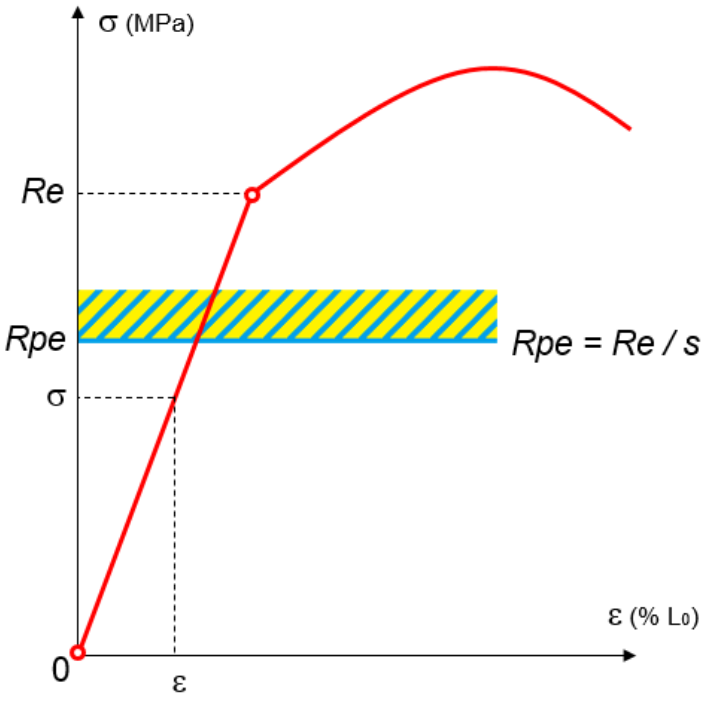
Toutefois, pour prendre en compte les éventuels écarts entre la réalité et le modèle de résistance des matériaux (géométrie simplifiée, isotropie, chocs….), on utilisera un coefficient de sécurité *s* qui garantira la condition de résistance vue précédemment. On définit alors une résistance pratique élastique *Rpe*, inférieure à la résistance élastique *Re*, qui devient la nouvelle limite à respecter :

$$Rpe = \frac{Re}{s}$$

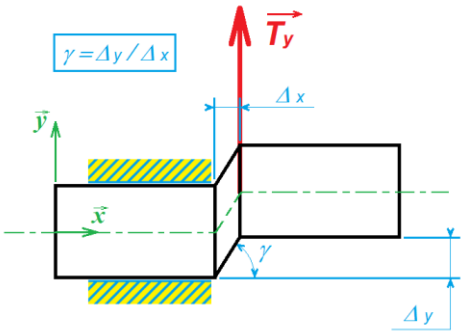
avec $s > 1$ *et dont la valeur est fonction du niveau de sécurité souhaité.*

L'expression définitive de la condition de résistance est :

$$\sigma < Rpe < Re$$



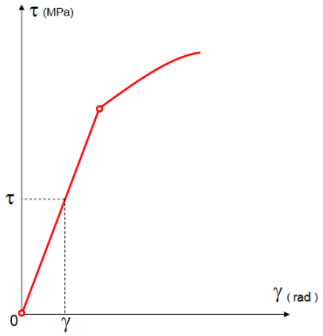
7.2 Condition de résistance… cas de la contrainte tangentielle

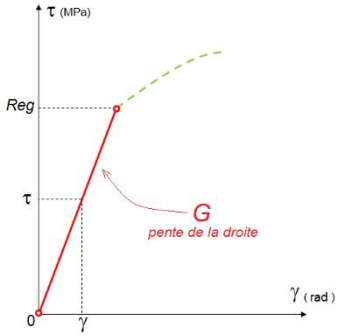


Principe de l'essai de cisaillement

Comme pour l'essai de traction, l'essai de cisaillement permet de définir des caractéristiques du matériau sollicité, mais ce coup-ci dans le cas du glissement transversal des sections droites. La courbe caractéristique de cet essai permet de définir, entre autre, *G* le module d'élasticité transversal (ou module de Coulomb) et *Reg* la résistance élastique au glissement.

La courbe caractéristique de l'essai de cisaillement exprime la contrainte tangentielle τ en fonction du glissement relatif γ. Comme pour l'essai de traction, on distingue deux zones : zone de déformation élastique et zone de déformation plastique.





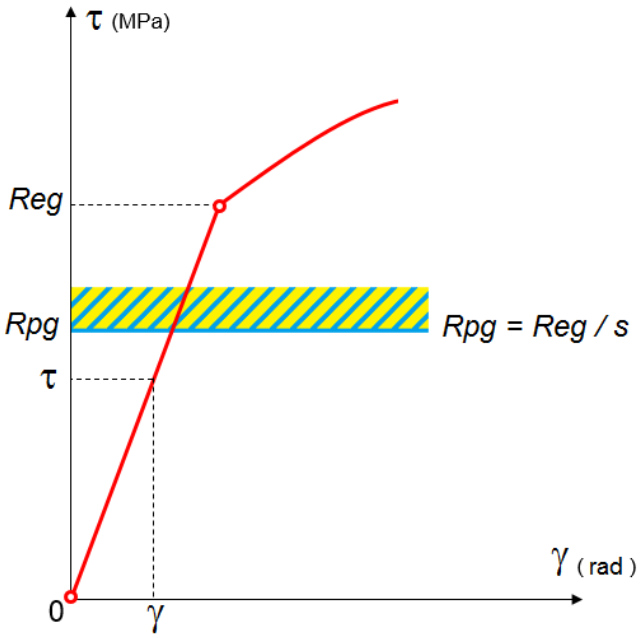
Si la contrainte τ est inférieure à *Reg*, on se trouve dans la zone de déformation élastique, où la contrainte est proportionnelle à la déformation. Cette relation est exprimée par la loi de Hooke :

$$\tau = G \,.\, \gamma$$

La condition de résistance dans le cas de contraintes tangentielles s'exprime de la manière suivante :

$$\tau < Rpg < Reg$$

avec

$$Rpg = \frac{Reg}{s}$$

$s > 1$ *et dont la valeur est fonction du niveau de sécurité souhaité.*